МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет електроніки
Кафедра промислової електроніки

О. О. АБАКУМОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО СЕМЕСТРОВОГО ЗАВДАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА»

для студентів спеціальності 171 «Електроніка»

спеціалізації «Електронні системи»

Київ – 2017

Гриф надано Вченою радою факультету електроніки НТУУ «КПІ»
(Протокол № 05/17 від 29 травня 2016 р.)

Рецензент: *В. А. Казміренко*, канд. техн. наук,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Відповідальний
редактор: Ю. *С. Ямненко,* д-р. техн. наук, проф.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Абакумова О. О.
Методичні рекомендації до виконання індивідуального семестрового завдання з дисципліни «Обчислювальна математика» для студентів спеціальності 171 «Електроніка» спеціалізації «Електронні системи» / О. О. Абакумова. – К.: КПІ ім.Ігоря Сікорського, 2017. – 26 с.

Методичні рекомендації містять роз’яснення щодо виконання індивідуального семестрового завдання у вигляді розрахунково-графічної роботи з дисципліни «Обчислювальна математика». Наведено загальні вимоги щодо оформлення та структури роботи, необхідні теоретичні відомості, зразок виконання та оформлення кожного завдання, критерії оцінювання та список рекомендованої літератури. Передбачено індивідуальні завдання для групи з 20 студентів.

Для студентів напряму підготовки 171 «Електроніка» всіх форм навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП

Індивідуальне семестрове завдання – форма організації навчання, яка має на меті поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань, що їх студенти отримують у процесі навчання, а також розвиток самостійного мислення та творчих здібностей студентів, підвищення їх пізнавальної активності, виховання наукового світогляду.

Основними видами індивідуальних семестрових завдань студентів є: реферат, розрахунково-графічна робота, домашня контрольна робота, курсова робота, курсовий проект, дипломна робот, магістерська дисертація.

Індивідуальне семестрове завдання є видом поза аудиторної самостійної роботи студента навчального чи навчально-дослідного характеру. Це завершена робота в межах навчальної програми дисципліни, яка виконується на основі знань, отриманих під час лекцій, семінарських, практичних та лабораторних занять, охоплює декілька тем або зміст навчальної дисципліни в цілому і завершується підготовкою відповідного письмового звіту.

Терміни видачі, виконання і захисту індивідуальних завдань визначаються графіком, що розробляється випусковою кафедрою на кожний семестр.

Індивідуальні семестрові завдання виконуються студентами самостійно із забезпеченням необхідних консультацій з окремих питань з боку викладача. Як правило, індивідуальні завдання виконуються окремо кожним студентом. У тих випадках, коли завдання мають комплексний характер, до їх виконання можуть залучатися декілька студентів.

Наявність позитивної оцінки, отриманої студентом за індивідуальне завдання, є необхідною умовою допуску до семестрового контролю з дисципліни.

Ці методичні рекомендації призначені для якісної організації поза аудиторної індивідуальної роботи студента навчального та навчально-дослідного характеру.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Розрахунково-графічна робота (РГР) – індивідуальне завдання, яке передбачає вирішення конкретної практичної навчальної задачі з використанням відомого, а також (або) самостійно вивченого теоретичного матеріалу. Значну частину такої роботи складає графічний матеріал, який виконується відповідно до чинних нормативних вимог та з обов'язковим застосуванням комп'ютерної графіки, якщо це визначено завданням.

Виконання розрахунково-графічної роботи сприяє поглибленому вивченню студентом теоретичного матеріалу, систематизації отриманих теоретичних знань, формуванню вмінь використання теоретичних положень дисципліни для розв'язання конкретних практичних завдань.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ТА СТРУКТУРИ РОБОТИ

1. Загальні вимоги

Мова виконання роботи: українська.

2. Оформлення роботи

Текст повинен бути набраний у текстовому редакторі Microsoft Word в одну колонку, вирівняний за шириною та не містити переносів.

Шрифт: Times New Roman, кегль 14.

Інтервал: полуторний.

Формат сторінки: А4 (210х297 мм).

3. Структура роботи

Розрахунково-графічна робота має складатися з наступних структурних елементів:

- титульна сторінка;
- індивідуальне завдання;
- розрахункова частина;
- графічна частина;
- сторінка відповідей.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1: використовуючи схему Горнера, скласти таблицю значень багаточлена $P(x)$ на відрізку $\left[0.5; 2.0\right]$ з кроком h=0.25. Відповідь дати з точністю до 0.0001. Побудувати графік апроксимуючої функції $y = P(x)$.

№1. $P(x) = 1.723x^5 + 0.137x^4 - 0.814x^3 + 2.364x^2 - 1.176x + 3.962$

№2. $P(x) = 1.654x^5 + 0.213x^4 - 0.744x^3 + 1.283x^2 - 2.151x + 4.134$

№3. $P(x) = 1.514x^5 - 0.124x^4 - 0.548x^3 + 3.214x^2 - 1.124x + 2.258$

№4. $P(x) = 0.372x^5 - 0.612x^4 + 0.532x^3 + 1.134x^2 - 1.247x - 1.624$

№5. $P(x) = 0.853x^5 - 1.514x^4 - 0.143x^3 + 1.217x^2 - 2.243x + 2.415$

№6. $P(x) = 0.623x^5 + 1.275x^4 - 0.217x^3 + 1.315x^2 - 3.174x - 1.862$

№7. $P(x) = 1.273x^5 + 0.116x^4 - 0.343x^3 + 3.115x^2 + 1.262x + 0.375$

№8. $P(x) = 0.375x^5 - 1.213x^4 + 1.108x^3 + 0.742x^2 - 3.115x + 2.724$

№9. $P(x) = 1.116x^5 + 0.127x^4 - 0.316x^3 + 1.164x^2 - 2.273x - 1.123$

№10. $P(x) = 0.764x^5 - 0.312x^4 + 1.216x^3 - 2.458x^2 + 1.273x + 0.834$

№11. $P(x) = 0.374x^5 + 0.242x^4 - 1.413x^3 + 0.746x^2 + 3.183x - 0.678$

№12. $P(x) = 1.073x^5 - 0.143x^4 + 0.568x^3 + 1.215x^2 - 3.146x + 1.618$

№13. $P(x) = 0.513x^5 - 0.837x^4 + 1.215x^3 + 2.453x^2 - 1.783x - 0.847$

№14. $P(x) = 1.087x^5 - 1.243x^4 + 0.656x^3 - 0.783x^2 + 2.574x + 0.564$

№15. $P(x) = 0.683x^5 + 1.143x^4 - 0.562x^3 + 1.844x^2 - 2.154x + 1.472$

№16. $P(x) = 1.213x^5 - 0.216x^4 + 1.316x^3 - 2.758x^2 + 3.612x - 0.388$

№17. $P(x) = 1.316x^5 - 0.144x^4 - 0.572x^3 + 1.854x^2 - 2.713x + 1.625$

№18. $P(x) = 1.172x^5 - 0.534x^4 - 0.316x^3 + 1.283x^2 + 1.615x - 2.652$

№19. $P(x) = 0.613x^5 + 0.318x^4 - 1.216x^3 + 2.517x^2 - 3.712x + 0.454$

№20. $P(x) = 0.287x^5 - 0.763x^4 + 1.072x^3 + 1.613x^2 - 2.312x - 1.418$

Завдання 2. Використовуючи метод сіток, скласти наближений розв'язок $U(x,y)$ задачі Діріхле для рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ у квадраті ABCD з вершинами $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$ із заданими межовими умовами; крок h=0.2. Відповідь дати з точністю до 0.1.

№	$U\|_{AB}$	$U\|_{BC}$	$U\|_{CD}$	$U\|_{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$50y(1-y)$	$20x^2(1-x)$	0	$40x(1-x^2)$
3	$50y(1\text{-}y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30(1-y^2)$	$30x$	30	30
7	$30(1\text{-}y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
8	0	$50\sin\pi x$	$50y(1-y^2)$	0
9	$40y^2$	40	40	$40\sin\frac{\pi x}{2}$
10	$50y^2$	$50(1-x)$	0	$60x(1-x^2)$
11	$20y^2$	20	$20y$	$10x(1-x)$
12	$40(1-y)$	$30\sqrt{x}$	$30y$	$40(1-x)$
13	40	40	$40y^2$	$40\sin\frac{\pi}{2}(1-x)$
14	$30y^2$	$30(1-x)$	0	$40x^2(1-x)$
15	$30y^2(1-y)$	$50\sin\pi x$	0	$10x^2(1-x)$
16	$10y^2(1-y)$	$30\sin\pi x$	0	$15x(1-x^2)$
17	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	$30x^2$	$30y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$
18	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
19	$20\sqrt{y}$	20	$20y^2$	$40x(1-x)$

20	$20y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	$20x^2$

Завдання 3. *Для непарних варіантів:* Методом золотого перетину знайти найбільше значення унімодальної функції $f(x)$ на заданому відрізку $[a;b]$ з точністю до 0.01. *Для парних варіантів:* Методом золотого перетину знайти найменше значення унімодальної функції $f(x)$ на заданому відрізку $[a;b]$ з точністю до 0.01.

Вар.	***Функція***	$[a,b]$
1	$f(x) = -x^2 - e^{-0.85x}$	$[-1;3]$
2	$f(x) = x^4 - 1.3arctg(1.5x)$	$[-2;2]$
3	$f(x) = 4x - e^{(x-0.2)}$	$[-1;3]$
4	$f(x) = x^2 + 2e^{-0.65x}$	$[-1;3]$
5	$f(x) = 1.5arctg(x) - x^4$	$[-2;2]$
6	$f(x) = e^{(x-0.4)} - 3.4x$	$[-1;3]$
7	$f(x) = -x^2 - 3e^{-0.45x}$	$[-2;3]$
8	$f(x) = x^4 - 0.9arctg(2.5x)$	$[-2;2]$
9	$f(x) = 2.8x - e^{(x-0.6)}$	$[-1;3]$
10	$f(x) = x^2 + 4e^{-0.25x}$	$[-3;2]$
11	$f(x) = 1.1arctg(2x) - x^4$	$[-2;2]$
12	$f(x) = e^{(x-0.8)} - 2.2x$	$[-1;4]$
13	$f(x) = -x^2 - 5e^{-0.05x}$	$[-2;3]$
14	$f(x) = x^4 - 0.3arctg(3.5x)$	$[-2;2]$
15	$f(x) = 1.6x - e^{(x-1)}$	$[-1;3]$
16	$f(x) = x^2 + 6e^{0.15x}$	$[-2;3]$
17	$f(x) = 0.7arctg(3x) - x^4$	$[-2;2]$
18	$f(x) = e^{(x-1.2)} - x$	$[-1;3]$

19	$f(x) = -x^2 - 7e^{0.35x}$	$\left[-4;1\right]$
20	$f(x) = x^4 + 0.2arctg(4.5x)$	$\left[-2;2\right]$

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Апроксимація функцій.

Обчислення багаточленів. Схема Горнера

Для практики доволі важливим є випадок апроксимації функції багаточленом.

Розглянемо алгебраїчний багаточлен $P(x)$ степеня *n*:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \; a_i \in R. \tag{1}$$

Представимо його у наступному вигляді:

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + ...\, x(a_{n-1} + a_n x)...)). \tag{2}$$

Згідно з цією формулою обчислення значення багаточлена $P(x)$ за умови фіксованого $x = x_0$ зводиться до послідовного знаходження наступних величин:

$$\begin{aligned}
&b_n = a_n, \\
&b_{n-1} = a_{n-1} + b_n x_0, \\
&\vdots \\
&b_i = a_i + b_{i+1} x_0, \\
&\vdots \\
&b_1 = a_1 + b_2 x_0, \\
&b_0 = a_0 + b_1 x_0 = P(x_0)
\end{aligned} \tag{3}$$

Шукане значення $P(x_0) = b_0$.

Спосіб знаходження значення багаточлена за формулами (3) (за формулою (2)), називають ***схемою Горнера.***

Виконуючи ручні розрахунки за схемою Горнера зазвичай складають таку таблицю:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
+		$x_0 b_n$	$x_0 b_{n-1}$	...	$x_0 b_1$
	$b_n = a_n$	b_{n-1}	b_{n-2}	...	$b_0 = P_n(x_0)$

Рівняння з частковими похідними

Розв’язання практичних інженерних задач у багатьох випадках зводиться до розв’язання диференційних рівнянь з частковими похідними.

Якщо розв’язок рівняння шукається у обмеженій області, то задаються умови на її межі, так звані *межові (крайові) умови*. Такі задачі називають *крайовими задачами* для рівнянь з частковими похідними.

Диференційні рівняння з частковими похідними виду

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

називають *рівняннями Лапласа.*

Розглянемо двомірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (4)$$

Розв’язок $U(x, y)$ цього рівняння будемо шукати для деякої обмеженої області D зміни значень незалежних змінних x, y. Межею області D є замкнена лілія L. Межові умови задаються у вигляді

$$U(x, y)|_L = \varphi(x, y) \qquad (5)$$

Задача, яка полягає у розв’язанні рівняння Лапласа за відомих значень шуканої функції на межі розрахункової області, називають *задачею Діріхле.*

Одним з методів розв’язання задачі Діріхле є побудова *різницевої схеми* шляхом апроксимації рівняння (4). Для цього у області розв’язку D вводять різницеву сітку з кроком h за допомогою координатних прямих $x = const$ та $y = const$.

Значення функції $U(x, y)$ у вузлах сітки (x_i, y_i) замінюють значеннями сіткової функції u_{ij}. Апроксимуючи другі похідні у рівнянні (4) за допомогою співвідношень кінцевих різниць (шаблон зображений на рис. 1), отримують різницеве рівняння:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h^2} = 0.$$

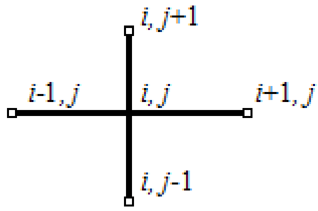

Рис. 1. Шаблон для рівняння Лапласа

Дане рівняння можна представити у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень сіткової функції у вузлах. Система матиме вигляд:

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right).$$

Значення сіткової функції у вузлах, розташованих на межі області розв'язку, знаходять із межових умов (5):

$$u_{0j} = \varphi(x_0, y_j),\ u_{1j} = \varphi(x_1, y_j),\ u_{i0} = \varphi(x_i, y_0),\ u_{i1} = \varphi(x_i, y_1).$$

Одним з методів розв'язання отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь є ітераційний метод. Ітераційний процес контролюється максимальним відхиленням значень сіткової функції у вузлах для двох послідовних ітерацій. Якщо його величина досягне деякого заданого малого числа ε, ітерації зупиняються.

Оптимізація функцій

Під ***оптимізацією*** розуміють процес вибору найкращого варіанту з усіх можливих. Більшість *задач оптимізації* зводиться до пошуку найменшого (найбільшого) значення деякої функції. Методи математичного аналізу зручні для розв'язання цієї задачі, коли функція задається в явному вигляді і при цьому є диференційованою. Коли ж функція задається таблицею значень або має аналітично громіздку формулу, ефективними є числові методи розв'язання.

Існують різні числові *методи пошуку* для розв'язання задачі оптимізації. Вони засновані на обчисленні функції в окремих точках і виборі серед них найбільшого чи найменшого значення. Процес розв'язання задачі методом пошуку полягає у послідовному звуженні інтервалу зміни параметра функції, який називають *інтервалом невизначеності*. На початку процесу оптимізації його довжина дорівнює $b-a$, а по закінченню вона має стати меншою за допустиму похибку ε, причому $x_{n+1}-x_n<\varepsilon$.

Метод золотого перетину

Одним з найбільш ефективних числових методів оптимізації функції є **метод золотого перетину**. Він полягає в побудові послідовності відрізків, що стягуються до точки мінімуму (максимуму) функції. На кожному кроці, за виключенням першого, обчислення значення функції $f(x)$ проводяться лише в одній точці, яку називають *золотим перетином*.

Точка x здійснює з***олотий перетин*** відрізка $[a;b]$ якщо відношення довжини всього відрізка до довжини його більшої частини дорівнює відношенню довжини більшої частини відрізка до довжини його меншої частини (рис. 2):

$$\frac{b-a}{b-x}=\frac{b-x}{x-a}=\varphi.$$

Число $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803398874989484...$ називають ***золотим числом***.

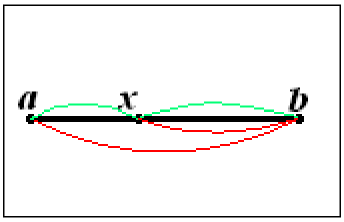

Рис. 2. Золотий перетин відрізка $[a;b]$ точкою x

Зауважимо, що на відрізку $[a;b]$ можна визначити дві симетрично розміщені відносно центру відрізка точки (x_1 та x_2), що реалізують золотий перетин (рис. 3). Їх знаходимо за формулами:

$$x_1=b-\frac{b-a}{\varphi},\ x_2=a+\frac{b-a}{\varphi}.$$

Якщо $a<x_1<x_2<b$, то очевидно, що точка x_1 ділить відрізок $[a;x_2]$ у

відношенні золотого перетину. Аналогічно x_2 ділить відрізок $[x_1;b]$ у тій самій пропорції. Ця властивість й використовується для побудови ітераційного процесу.

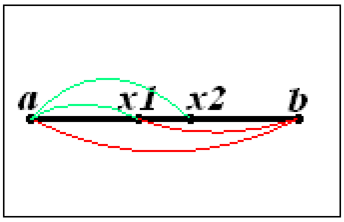

Рис. 3. Точки золотого перетину відрізка $[a;b]$

Розглянемо метод золотого перетину на прикладі знаходження мінімуму функції $f(x)$ на заданому відрізку. Припустимо, що функція *унімодальна*, т. б. на даному відрізку вона має лише один мінімум.

На першій ітерації в середині відрізка $[a;b]$ у пропорції золотого перетину обираємо дві внутрішні точки x_1 та x_2 й обчислюємо значення функції у цих точках. Якщо $f(x_1) < f(x_2)$, очевидно, що мінімум функції розташований на одному з відрізків: $[a;x_1]$ чи $[x_1;x_2]$. Тому відрізок $[x_2;b]$ можна відкинути, зменшивши тим самим початковий інтервал невизначеності. Другу ітерацію проводимо на новому відрізку $[a;b]$, ввівши позначення:

$$b = x_2,\ x_2 = x_1,\ x_1 = b - \frac{b-a}{\varphi}.$$

Якщо ж $f(x_1) > f(x_2)$, очевидно, що мінімум функції розташований на одному з відрізків: $[x_1;x_2]$ чи $[x_2;b]$. Отже можна відкинути відрізок $[a;x_1]$. Другу ітерацію в цьому випадку проводимо на новому відрізку $[a;b]$, ввівши позначення:

$$a = x_1,\ x_1 = x_2,\ x_2 = a + \frac{b-a}{\varphi}.$$

Знову обчислюємо значення функції $f(x_1)$ і $f(x_2)$, проводимо порівняння та повторюємо алгоритм звуження інтервалу невизначеності.

Процес оптимізації триває до тих пір, поки довжина чергового відрізка

$[a;b]$ не стане меншою за задану величину ε:

$$\left|b^{(k)} - a^{(k)}\right| < \varepsilon, \text{ де } k = 0,1,2,3,...$$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Завдання 1: використовуючи схему Горнера, скласти таблицю значень багаточлена $P(x) = 0.883x^5 - 1.217x^4 + 1.452x^3 + 0.572x^2 - 2.343x + 1.158$ для апроксимації функції на відрізку $[0.5;2.0]$ з кроком h=0.25. Відповідь дати з точністю до 0.001. Побудувати графік апроксимуючої функції $y = P(x)$.

Розв'язання:

Для обчислення за схемою Горнера складемо таблицю, що міститиме всі проміжні результати та значення шуканого багаточлена.

У верхньому рядку таблиці запишемо коефіцієнти a_i даного багаточлена, а у першому стовпчику – значення аргумента *x*. Решта рядків міститимуть значення b_i, які у схемі Горнера знаходяться за єдиною формулою:

$$b_i = a_i + b_{i+1}x, \ (i = 0, 1, 2, 3, 4); \ b_5 = a_5$$

	0.883	**-1.217**	**1.452**	**0.572**	**-2.343**	**1.158**
0.50	0.883	-0.7755	1.06425	1.1041	-1.7909	0.2625
0.75	0.883	-0.5547	1.0359	1.3490	-1.3313	0.1595
1.00	0.883	-0.3340	1.1180	1.6900	-0.6530	0.5050
1.25	0.883	-0.1132	1.3104	2.2100	0.4196	1.6824
1.50	0.883	0.1075	1.6132	2.9919	2.1448	4.3752
1.75	0.883	0.3282	2.0264	4.1183	4.8640	9.6699
2.00	0.883	0.5490	2.550	5.6720	9.0010	19.1600

В останньому стовпчику таблиці отримуємо шукані значення багаточлена *P(x)*.

Побудуємо графік апроксимуючої функції $y = P(x)$ (рис. 4):

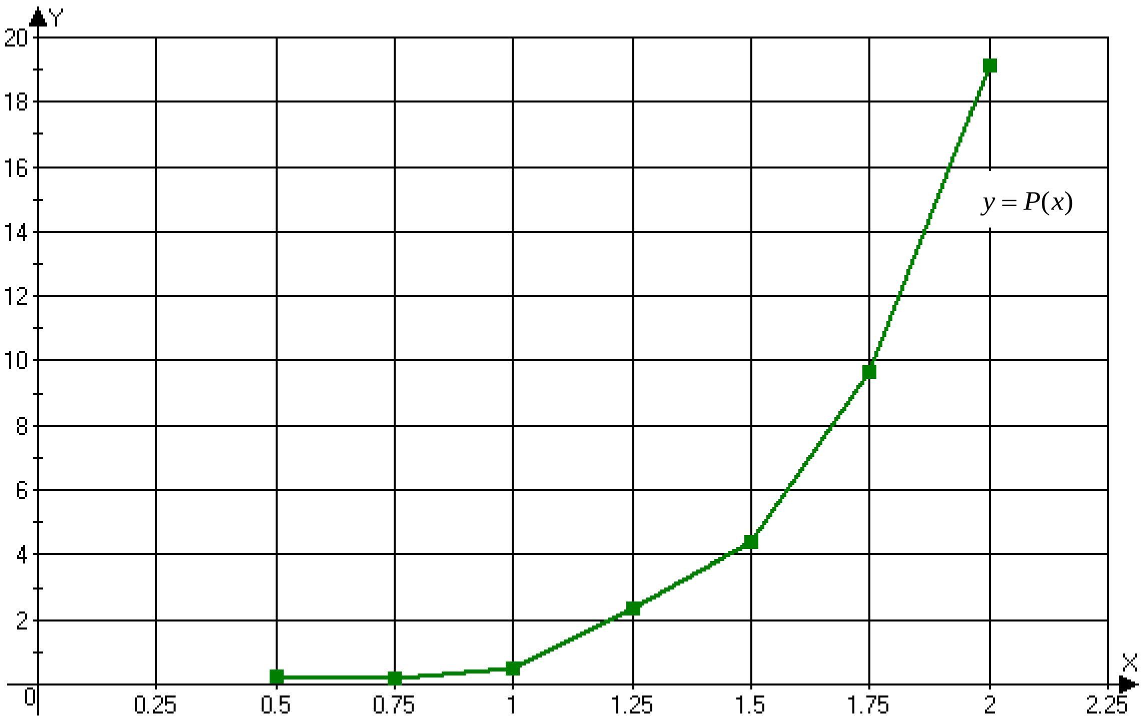

Рис. 4. Графік апроксимуючої функції $y = P(x)$

Відповідь:

x_i	$P(x_i)$
0.50	0.263
0.75	0.160
1.00	0.505
1.25	2.373
1.50	4.375
1.75	9.670
2.00	19.160

Завдання 2. Використовуючи метод сіток, скласти наближений розв'язок $U(x, y)$ задачі Діріхле для рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ у квадраті ABCD з вершинами $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$ із заданими межовими умовами

$U\big|_{AB} = 45y(1-y),\quad U\big|_{BC} = 25x,\quad U\big|_{CD}=25,\quad U\Big|_{AD}= 25x\sin\dfrac{\pi x}{2}$**;** крок h=0.2**.**

Відповідь дати з точністю до 0.01.

Розв'язання:

Побудуємо область розв'язку, тобто введемо у квадраті ABCD сітку з кроком h=0.2. Вузли сітки є розрахунковими точками (рис. 5):

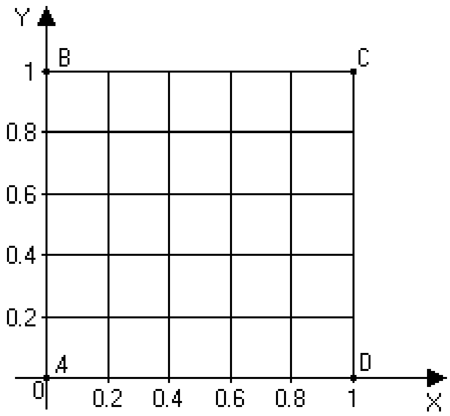

Рис. 5. Сітка області розв'язку

Значення функції $U(x,y)$ на стороні AB шукаємо за формулою $U(x,y) = 45y(1-y).$ Маємо: $U(0,0)=0;$ $U(0,0.2)=7.2;$ $U(0,0.4)=10.8;$ $U(0,0.6)=10.8;$ $U(0,0.8)=7.2;$ $U(0,1)=0.$

На стороні *BC:* $U(x,y)=25x.$ Маємо: $U(0.2,1)=5;$ $U(0.4,1)=10;$ $U(0.6,1)=15;$ $U(0.8,1)=20;$ $U(1,1)=25.$

На стороні *BC:* $U(x,y)=25.$ Отже: $U(1,0.8)=U(1,0.6)=U(1,0.4)=$ $=U(1,0.2)=U(1,0)=25.$

На стороні *AD:* $U(x,y)=25x\sin\dfrac{\pi x}{2}.$ Маємо: $U(0.2,0)=1.545;$ $U(0.4,0)=5.875;$ $U(0,6)=12.131;$ $U(0.8,0)=19.017.$

Відмітимо на сітці знайдені межові значення та шукані значення функції $U(x,y)$ (рис. 6):

0	5	10	15	20	25
7.2	U_{13}	U_{14}	U_{15}	U_{16}	25
10.8	U_9	U_{10}	U_{11}	U_{12}	25
10.8	U_5	U_6	U_7	U_8	25
7.2	U_1	U_2	U_3	U_4	25
0	1.545	5.878	12.135	19.021	25

Рис. 6. Розрахункові точки області розв'язку

Для визначення значень функції у внутрішніх точках області розв'язку методом сіток задане рівняння Лапласа у кожній точці замінимо кінцево-різницевим рівнянням за формулою

$$U(x_i, y_j) = \frac{1}{4}\left(U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1}\right).$$

За цією формулою складемо рівняння для кожної внутрішньої точки сітки. В результаті отримаємо систему рівнянь:

$$U_1 = U(0.2;0.2) = \frac{1}{4}(7.2 + 1.545 + U_2 + U_5);$$

$$U_2 = U(0.4;0.2) = \frac{1}{4}(5.878 + U_1 + U_3 + U_6);$$

$$U_3 = U(0.6;0.2) = \frac{1}{4}(12.135 + U_2 + U_4 + U_7);$$

$$U_4 = U(0.8;0.2) = \frac{1}{4}(19.021 + 25 + U_3 + U_8);$$

$$U_5 = U(0.2;0.4) = \frac{1}{4}(10.8 + U_1 + U_6 + U_9);$$

$$U_6 = U(0.4;0.4) = \frac{1}{4}(U_2 + U_5 + U_7 + U_{10});$$

$$U_7 = U(0.6;0.4) = \frac{1}{4}(U_3 + U_6 + U_8 + U_{11});$$

$$U_8 = U(0.8;0.4) = \frac{1}{4}(25 + U_4 + U_7 + U_{12});$$

$$U_9 = U(0.2;0.6) = \frac{1}{4}(10.8 + U_5 + U_{10} + U_{13});$$

$$U_{10} = U(0.4;0.6) = \frac{1}{4}(U_6 + U_9 + U_{11} + U_{14});$$

$$U_{11} = U(0.6;0.6) = \frac{1}{4}(U_7 + U_{10} + U_{12} + U_{15});$$

$$U_{12} = U(0.8;0.6) = \frac{1}{4}(25 + U_8 + U_{11} + U_{16});$$

$$U_{13} = U(0.2;0.8) = \frac{1}{4}(7.2 + 5 + U_9 + U_{14});$$

$$U_{14} = U(0.4;0.8) = \frac{1}{4}(10 + U_{10} + U_{13} + U_{15});$$

$$U_{15} = U(0.6;0.8) = \frac{1}{4}(15 + U_{11} + U_{14} + U_{16});$$

$$U_{16} = U(0.8;0.8) = \frac{1}{4}(20 + 25 + U_{12} + U_{15}).$$

Розв'язок цієї системи будемо шукати ітераційним методом Гауса-Зейделя. Розрахункові співвідношення матимуть вигляд:

$$U_1^{(k)} = \frac{1}{4}\left(8.745 + U_2^{(k-1)} + U_5^{(k-1)}\right);$$

$$U_2^{(k)} = \frac{1}{4}\left(5.878 + U_1^{(k)} + U_3^{(k-1)} + U_6^{(k-1)}\right);$$

$$U_3^{(k)} = \frac{1}{4}\left(12.135 + U_2^{(k)} + U_4^{(k-1)} + U_7^{(k-1)}\right);$$

$$U_4^{(k)} = \frac{1}{4}\left(44.021 + U_3^{(k)} + U_8^{(k-1)}\right);$$

$$U_5^{(k)} = \frac{1}{4}\left(10.8 + U_1^{(k)} + U_6^{(k-1)} + U_9^{(k-1)}\right);$$

$$U_6^{(k)} = \frac{1}{4}\left(U_2^{(k)} + U_5^{(k)} + U_7^{(k-1)} + U_{10}^{(k-1)}\right);$$

$$U_7^{(k)} = \frac{1}{4}\left(U_3^{(k)} + U_6^{(k)} + U_8^{(k-1)} + U_{11}^{(k-1)}\right);$$

$$U_8^{(k)}=\frac{1}{4}\left(25+U_4^{(k)}+U_7^{(k)}+U_{12}^{(k-1)}\right);$$

$$U_9^{(k)}=\frac{1}{4}\left(10.8+U_5^{(k)}+U_{10}^{(k-1)}+U_{13}^{(k-1)}\right);$$

$$U_{10}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(U_6^{(k)}+U_9^{(k)}+U_{11}^{(k-1)}+U_{14}^{(k-1)}\right);$$

$$U_{11}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(U_7^{(k)}+U_{10}^{(k)}+U_{12}^{(k-1)}+U_{15}^{(k-1)}\right);$$

$$U_{12}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(25+U_8^{(k)}+U_{11}^{(k)}+U_{16}^{(k-1)}\right);$$

$$U_{13}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(12.2+U_9^{(k)}+U_{14}^{(k-1)}\right);$$

$$U_{14}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(10+U_{10}^{(k)}+U_{13}^{(k)}+U_{15}^{(k-1)}\right);$$

$$U_{15}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(15+U_{11}^{(k)}+U_{14}^{(k)}+U_{16}^{(k-1)}\right);$$

$$U_{16}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(45+U_{12}^{(k)}+U_{15}^{(k)}\right).$$

Для проведення обчислень за цими формулами необхідно визначити початкові наближення $U_i^{(0)}$. Припустимо, що функція $U(x,y)$ по горизонталях області розв’язку розподілена рівномірно.

Розглянемо горизонталь з граничними точками (0, 0.2) та (1, 0.2). Шукані значення функції у внутрішніх точках позначимо через $U_1^{(0)},U_2^{(0)},U_3^{(0)},U_4^{(0)}$. Оскільки відрізок поділений на 5 частин, то крок зміни функції знаходимо зі співвідношення

$$K_1=\frac{25-7.2}{5}=3.56.$$

Тоді отримаємо

$$U_1^{(0)}=7.2+K_1=7.2+3.56=10.76;$$

$$U_2^{(0)}=U_1^{(0)}+K_1=10.76+3.56=14.32;$$

$$U_3^{(0)}=U_2^{(0)}+K_1=14.32+3.56=17.88;$$

$U_4^{(0)} = U_3^{(0)} + K_1 = 17.88 + 3.56 = 21.44.$

Аналогічні міркування проведемо для знаходження початкових наближень у внутрішніх точках інших горизонталей.

Для другої горизонталі з граничними точками (0, 0.4) та (1, 0.4) маємо

$$K_2 = \frac{25 - 10.8}{5} = 2.84.$$

Отже,

$U_5^{(0)} = 10.8 + 2.84 = 13.64;$ $U_6^{(0)} = 13.64 + 2.84 = 16.48;$

$U_7^{(0)} = 16.48 + 2.84 = 19.32;$ $U_8^{(0)} = 19.32 + 2.84 = 22.16.$

Значення у граничних точках третьої горизонталі такі самі, як й для другої. Тому, $U_9^{(0)} = U_5^{(0)} = 13.64;$ $U_{10}^{(0)} = U_6^{(0)} = 16.48;$

$U_{11}^{(0)} = U_7^{(0)} = 19.32;$ $U_{12}^{(0)} = U_8^{(0)} = 22.16.$

Нарешті, значення у граничних точках четвертої горизонталі такі самі, як й для першої. Отже,

$U_{13}^{(0)} = U_1^{(0)} = 10.76;$ $U_{14}^{(0)} = U_2^{(0)} = 14.32;$

$U_{15}^{(0)} = U_3^{(0)} = 17.88;$ $U_{16}^{(0)} = U_4^{(0)} = 21.44.$

Всі отримані значення розміщуємо у таблиці, яку називають *нульовим шаблоном*:

1	0	5	10	15	20	25
0.8	7.2	10.76	14.32	17.88	21.44	25
0.6	10.8	13.64	16.48	19.32	22.16	25
0.4	10.8	13.64	16.48	19.32	22.16	25
0.2	7.2	10.76	14.32	17.88	21.44	25
0	0	1.545	5.875	12.131	19.017	25
	0	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1**

Для кожного нового наближеного розв’язку задачі складаємо таблицю, що міститиме лише внутрішні значення, які змінюються в процесі обчислень. Ці таблиці називають *шаблонами*.

Отримаємо наступну послідовність шаблонів:

Шаблон №1

9.790	13.258	17.027	20.904
12.641	15.363	18.411	21.589
12.524	15.170	18.241	21.506
9.176	12.354	16.312	20.623

Шаблон №2

9.346	12.708	16.561	20.679
11.927	14.460	17.630	21.153
11.754	14.243	17.443	21.079
8.406	11.442	15.610	20.384

Шаблон №3

9.092	12.371	16.287	20.544
11.461	13.829	17.100	20.887
11.239	13.518	16.856	20.771
7.985	10.929	15.189	20.074

Шаблон №4

8.930	12.158	16.116	20.458
11.150	13.414	16.761	20.718
10.877	13.036	16.454	20.567
7.728	10.581	14.911	19.926

Шаблон №5

8.826	12.021	16.005	20.403
10.945	13.144	16.542	20.608
10.634	12.712	16.189	20.433
7.551	10.344	14.715	19.826

Шаблон №6

8.758	11.933	15.934	20.368
10.811	12.968	16.399	20.537
10.472	12.497	16.014	20.345
7.431	10.184	14.583	19.759

Шаблон №7

8.714	11.875	15.887	20.344
10.723	12.853	16.306	20.490
10.365	12.365	15.899	20.288
7.350	10.077	14.496	19.716

Шаблон №8

8.685	11.837	15.851	20.327
10.665	12.777	16.221	20.457
10.294	12.263	15.875	20.263
7.297	10.007	14.439	19.687

Шаблон №9

8.666	11.811	15.835	20.319
10.628	12.725	16.203	20.439
10.248	12.215	15.778	20.228
7.262	9.960	14.414	19.675

Шаблон №10

8.654	11.796	15.823	20.313
10.603	12.695	16.178	20.427
10.220	12.165	15.744	20.210
7.238	9.936	14.381	19.658

Шаблон №11

8.646	11.786	15.815	20.308
10.587	12.674	16.162	20.418
10.198	12.137	15.722	20.199
7.225	9.912	14.362	19.648

Шаблон №12

8.640	11.779	15.809	20.306
10.576	12.661	16.150	20.413
10.184	12.120	15.708	20.192
7.214	9.898	14.351	19.643

Шаблон №13

8.637	11.774	15.806	20.304
10.569	12.652	16.143	20.409
10.176	12.108	15.699	20.188
7.207	9.889	14.344	19.639

Шаблон №14

8.635	11.772	15.803	20.303
10.565	12.646	16.138	20.407
10.170	12.101	15.693	20.185
7.202	9.883	14.339	19.637

Шаблон №15

8.634	11.770	15.802	20.302
10.562	12.642	16.135	20.405
10.167	12.096	15.689	20.183
7.200	9.879	14.336	19.636

Ітераційний процес зупиняємо, оскільки шаблони №15 та №14 містять послідовні наближення, відхилення між якими стали меншими за 0.01 (задану точність). Результат округлюємо до сотих долей.

Відповідь:

1	0	5	10	15	20	25
0.8	7.2	8.63	11.77	15.80	20.30	25
0.6	10.8	10.56	12.64	16.14	20.40	25
0.4	10.8	10.17	12.10	15.69	20.18	25
0.2	7.2	7.20	9.88	14.34	19.64	25
0	0	1.54	5.88	12.14	19.02	25
	0	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1**

Завдання 3. Методом золотого перетину знайти мінімальне значення унімодальної функції $f(x) = x^2 + 10e^{0.95x}$ на відрізку $[-5;5]$ з точністю до 0.01.

Розв'язання:

Обчислення проводимо за формулами:

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\varphi}, \; x_2 = a + \frac{b-a}{\varphi}.$$

Результати обчислень заносимо до таблиці:

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(x_1^{(k)})$	$f(x_2^{(k)})$
1	-5	5	-1.18047	1.18047	4.65159	32.08641
2	-5	1.18047	-2.63935	-1.18047	7.78098	4.65159
3	-2.63935	1.18047	-1.18047	-0.27852	4.65159	7.75273
4	-2.63935	-0.27852	-1.73763	-1.18047	4.93841	4.65159
5	-1.73763	-0.27852	-1.18047	-0.83583	4.65159	5.21877
6	-1.73763	-0.83580	-1.39317	-1.18050	4.60291	4.65157
7	-1.73763	-1.18050	-1.52483	-1.39320	4.67412	4.60292
8	-1.52480	-1.18050	-1.39320	-1.31201	4.60292	4.59672
9	-1.39320	-1.18050	-1.31200	-1.26174	4.59672	4.60799
10	-1.39320	-1.26170	-1.34297	-1.31200	4.59558	4.59672
11	-1.39320	-1.31200	-1.36219	-1.34300	4.59706	4.59558
12	-1.36220	-1.31200	-1.34300	-1.33117	4.59558	4.59550
13	-1.34300	-1.31200	-1.33120	-1.32384	4.59550	4.59577
14	-1.34300	-1.32380	-1.33567	-1.33120	4.59546	4.59550
15	-1.34300	-1.33120	-1.33849	-1.33567	4.59548	4.59546
16	-1.33849	-1.33120	-1.33567	-1.33398	4.59546	4.59547

Критерієм закінчення ітераційного процесу є виконання умови

$$\left|b^{(k)} - a^{(k)}\right| < 0.01, \quad k = 0,1,2,3,...$$

Оскільки:

$$\left|b^{(16)} - a^{(16)}\right| = \left|-1.33120 + 1.33849\right| = 0.00729 < 0.01,$$

то ітераційний процес зупиняється. Можемо прийняти

$$x_{\min} \approx \frac{1}{2}\left(-1.33849 - 1.33120\right) \approx -1.33485 \approx -1.33.$$

Отже

$$y_{\min} = f(x_{\min}) = (-1.33)^2 + 10e^{0.95(-1.33)} \approx 4.59553 \approx 4.60.$$

Відповідь: $x_{\min} \approx -1.33$, $y_{\min} \approx 4.60$.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Оцінювання розрахунково-графічної роботи відбуватиметься на основі аналізу наступних факторів:

- наявність розрахункових формул;
- наявність проміжних розрахунків;
- формат подання відповіді;
- правильність виконання аналітичної частини роботи;
- правильність виконання графічної частини роботи;
- оформлення роботи.

«*Відмінно*», повне правильне виконання роботи, відповідність зазначеним вимогам та критеріям – 34-36 балів;
«*Добре*», повне виконання роботи з певними незначними недоліками, невідповідність зазначеним вимогам та критеріям – 28-33 бали;
«*Задовільно*», неповне виконання роботи, незначні помилки при розрахунках, невідповідність зазначеним вимогам та критеріям – 22-27 балів;
«*Незадовільно*», неповне виконання роботи, грубі помилки при розрахунках, невідповідність зазначеним вимогам та критеріям – 1-21 балів.
«*Роботу не зараховано*», робота не відповідає варіанту – 0 балів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с. – Библ.: с. 593-595. – 35500 экз.
2. *Бахвалов Н. С.* Численные методы : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.: ил. – Библ.: с. 624-628. – ISBN 5-94774-175-X.
3. *Боглаев Ю. П.* Вычислительная математика и программирование. – М.: Высш. шк., 1990. – 544 с. – Библ.: с. 534-535. – 50000 экз. – ISBN 5-06-000623-9

4. *Волков, Е. А.* Численные методы : учебное пособие / Е. А. Волков. – 5-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 256 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – Библ.: с. 244. – ISBN978-5-8114-0538-1
5. *Воробьева Г. М., Данилова А. М.* Практикум по вычислительной математике. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.: ил. – Библ.: с. 205. – 90000 экз. – ISBN 5-06-001544-0
6. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. – 1970. – 664 с. – Библ. в конце глав. – 60000 экз.
7. *Калиткин Н. Н.* Численные методы: учеб. пособие / Н.Н.Калиткин. – 2-е изд. исправленное. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 586 с.: ил. – (Учебная литература для вузов). – 1200 экз. – ISBN 978-5-9775-0500-0.
8. *Кунцман Ж.* Численные методы: Учеб. пособие / Перевод с франц., Под ред. Д. П. Костомарова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 160 с. – 80000 экз.
9. *Марчук Г.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 456 с.: ил. – Библ.: с. 429-452. – 30000 экз.
10. *Петергеря Ю.С., Соболєв О.В., Абакумова О.О.* Обчислювальна математика: Навч. посібник. – К.: НТУУ «КПІ», 2007. – Ч.1. – 92 с. – Бібл.: с. 88. – 100 пр. – ISBN 978-966-622-265-0
11. *Петергеря Ю.С., Соболєв О.В., Абакумова О.О.* Обчислювальна математика: Навч. посібник. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – Ч.2. – 68 с. – Бібл.: с. 65. – 100 пр. – ISBN 978-966-622-351-0
12. *Плис А.И., Сливина Н.А.* Лабораторный практикум по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1983. – 208 с.: ил.
13. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с. – Библ.: с. 426-427. – 36000 экз. – ISBN 5-02-013996-3
14. *Турчак Л. И.* Основы численных методов: Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл.

ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с. – Библ.: с. 309-311. – 43000 экз.

15. *Турчак Л. Н., Плотников П.В.* Основы численных методов: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 304 с. – Библ.: с. 290-292. – 3000 экз. – ISBN 5-9221-0153-6.

16. *Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А.* Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича група BHV, 2006. - 480 стр.: іл. – 3000 пр. – ISBN 966-552-155-1.

17. *Хемминг Р. В.* Численные методы (для научных работников и инженеров). – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 400 с. – Библ.: с. 399-400. – 22500 экз.